La théorie kantienne de la géométrie

Exposé pour la Lysimaque, 14 Juin 2008
Pierre Pitigliano

Introduction

Je suis parti de cette question de Lacan dans l'Etourdit : « *la topologie, n'est-ce pas ce n'espace où nous amène le discours mathématique et qui nécessite révision de l'esthétique de Kant ?* » (seuil p.472), pour me demander ce qu'est un espace.

Est-ce que la topologie est la négation de l'espace kantien, c'est dire la négation de l'espace comme intuition apriori ? Alors la topologie serait-elle l'affirmation de l'espace comme concept ? Je suppose que la géométrie est une théorie de l'espace, ce qui mériterait à mon sens d'etre intérrogé, comme suit : quel est le mode de rapport de l'espace à la géométrie ?

Dans Radiophonie, Lacan reproche à Kant l'obscurantisme par lequel il relaie les « *intuitions géométriques les plus traditionnelles qui soient* », où « *s'embrochent ontologie, cosmologie, sans que la théologie leur fasse défaut…* » (op.cit. p.423-424). Et dans l'Etourdit, il épingle « *la topologie inepte à quoi Kant a donné corps de son propre établissement, celui du bourgeois qui ne peut imaginer que de la transcendance…* » (p. 480)

J'ai pensé que de tels reproches méritaient débat, et c'est pourquoi j'ai fait la lecture d'un article relativement récent (1985) de Michael Friedman, *Kant's Theory of Geometry*, qui semble faire référence, du moins pour les philosophes des sciences et les kantiens anglosaxons. Friedman est professeur à l'université de Stanford, titulaire de la chaire de philo des sciences, et d'études kantiennes. Il est aussi connu pour ses travaux les mathématiques et la physique contemporaine.

Dans cet article il reprend l'examen de la géométrie kantienne à partir de la critique qu'en fait Russell dans les *Principes des mathématiques* de 1903. Pour Friedman, c'est la critique moderne standard de la théorie kantienne des mathématiques, qui tient dans cette formule de Russell, « *le raisonnement mathématique n'a pas besoin d'élément extra-logique* ».
(Et c'est le point de vue logique qui prévaut sur le point de vue mathématique dans l'article de Friedman)

Dans cette tradition critique, il est d'abord reproché à Kant d'échouer à faire la distinction cruciales de entre géométrie pure et géométrie appliquée.
C'est par exemple la formule d'Einstein :

« *tant que les lois de la géométrie se réfèrent à la réalité, elles ne sont pas certaines ; et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne réfèrent pas à la réalité.* » (***Geometrie et experience***, 1921).

Friedman se situe explicitement dans le fil de la critique russellienne, bien qu'il la trouve injuste envers Kant, et il propose une alternative . La conception kantienne de la logique n'est certainement pas la conception moderne qui commence en 1879 avec Frege.
L'importance de mettre en rapport la conception kantienne de la logique avec sa conception des mathématiques a été pointée particulièrement par Hintikka et Parsons.
De meme, les mathématiques modernes ne sont pas celles du siécle des lumières.

Friedman propose alors une torsion de la critique russelienne :

« *au lieu d'utiliser notre conception moderne de la logique pour dénigrer et révoquer les théories antérieures de l'espace, nous devrions l'utiliser comme outil pour interpréter et expliquer ces théories, pour approffondir notre compréhension des difficiles problèmes logiques aves lesquels elles se débattaient.* »

Le raisonnement de Friedman se dévelloppe ainsi dans une mise en perspective du texte kantien , alternativement dans son contexte propre et du point de vue de la logique et des mathématiques modernes. A la fin de son examen minutieux , si il rejoint la critique russelienne de la géométrie kantienne, c'est selon ses termes en ayant quand meme rendu justice à Kant, à qui « *on ne peut reprocher d'avoir failli à anticiper les découvertes logiques et mathématiques majeures d'une époque ultérieure ; il faut plutot l'applaudir pour la profondeur et la ténacité de sa perspicacité dans la pratique logique et mathématique de la sienne.* »

Au passage, il éxamine et réfute aussi une position dite anti-russelienne, en particulier celles de Hintikka et de L. Beck, qui elle, pose Kant, parfois à l'extreme, comme un précurseur des géométries non-euclidiennes et de la logique moderne, à partir de l'idée selon laquelle « *la pure intuition joue un role fondamental en fournissant un modèle pour un système d'axiomes particulier* ». (modèle logique) Or, pour Friedman cette thèse ne tient pas en logique, et de plus elle n'est tout simplement pas kantienne.

Je n'aborderai pas aujourd'hui cet aspect de la question, mais il me semble que c'est une piste à retenir par rapport à la question posée par Lacan sur Kant faisant obstacle à la posibilité de l'avènement de la topologie. Il y a un article de référence sur Kant et les géométries non-euclidiennes, de Roberto Toretti de 1974*, la géométrie dans la pensée de Kant*, qui vaudrait le coup d'une suite à mon exposé d'aujourd'hui.

Ce qui semble essentiel dans la théorie de Kant, c'est qu'il donne une place et une fonction nécessaires à la pure intuition (Anschauung) dans le raisonnement mathématique, en plus de l'analyse des concepts.

Or, ce que dit Russell, c'est que les mathématiques doivent etre purement analytiques, sans référence à une quelconque expérience ou intuition, mais entierement déductibles des concepts logiques : la logique enveloppe les mathématiques.
Toute la question est de comprendre pourquoi Kant fait jouer un tel role fondateur à l'intuition dans sa théorie des mathémathiques.

Mais quel est le statut des mathématiques dans la philosophie de Kant ? Quelle est leur fonction ? Quel est le role de l'intuition dans cette philosophie ?

Si Friedman retourne au texte de Kant dans son article, c'est en piochant ce qui y concerne directement et explicitement les mathématiques et la géométrie, qu'il isole ainsi de l'ensemble. Sa technicité permet une étude précise et articulée de la géométrie de Kant dans ses rapports à l'intuition, et à la logique classique et moderne.
Mais cet isolement du point de vue mathématique dans Kant passe alors à coté de ce qui me parait essentiel, c'est à dire la possibilité de situer les enjeux de l'intuition et des mathématiques dans le projet philosophique de Kant dans sa portée générale, c'est à dire leur place et leur fonction dans, et pour, la philosophie transcendantale.

Je rejoins en ceci la remarque de Philonenko, « *on ne saurait mesurer exactement la portée de l'oeuvre de Kant, car bien des philosophies encore à naitre seront ou bien influencées par le criticisme, ou bien obligées de le critiquer.* » (L'oeuvre de Kant,1,introduction)

Et voici comment Kant entame le dialogue entre l'expérience et le concept, dans la préface à la Critique de la Raison Pure :

« La raison humaine a cette destinée particulière, dans un genre de ses connaissances, d'etre accablée de questions qu'elle ne peut écarter ; car elles lui sont proposées par la nature de la raison elle-meme, mais elle ne peut non plus y répondre, car elles dépassent tout pouvoir de la raison humaine.
Ce n'est pas sa faute si elle tombe dans cet embarras. Elle part de principes dont l'usage est inévitable dans le cours de l'expérience, et en meme temps suffisamment garanti par elle. Avec leur aide, elle s'élève toujours plus haut (…), vers des conditions plus éloignées. Mais, s'apercevant que, de cette manière, son oeuvre doit toujours rester inachevée, puisque les questions ne cessent jamais, elle se voit contrainte de se réfugier dans des principes qui dépassent tout usage possible d'expérience, et qui pourtant paraissent si peu suspects que la raison humaine commune elle-meme se trouve en accord avec eux. Mais, par là, elle se précipite dans l'obscurité et des contradictions, d'où elle peut certes conclure que cela doit tenir à des erreurs cachées quelque part, mais sans pouvoir les découvrir, **parceque les principes dont elle se sert, comme ils vont au-delà des limites de toute expérience, ne connaissent plus désormais de pierre de touche prise à l'expérience. Le champ de bataille de ces combats sans fin, voilà ce qu'on nomme *Métaphysique*.** »

1. La critique russellienne

Russell *Principles of Mathematics,* 1903

Russell considère que l'examen textuel de Kant à déjà été fait brillament par d'autres et qu'il ne compte pas s'y coller. Il veut discuter seulement des grandes lignes de la doctrine kantienne. Doctrine qui, plus ou moins modifiée, dit-il, à occupé le terrain durant tout le 19ème siécle, et a été presque universellement admise.
Comme le point de vue de Russell sur les mathématiques, déplié dans les chapitres précédents, est **diametralement opposé à celui de Kant**, il devient nécessaire pour lui à la fin de son livre de défendre les opinions qui le séparent de Kant.
C'est de la théorie de l'espace de la Critique de la Raison Pure et des Prolégomènes qu'il entend discuter et non de celle, différente, des écrits pré-critiques. Il sera particulièrement attentif à ce que Kant nomme les « déductions transcendantales » càd celles qui émanent de la nature des mathématiques.

Russell commence par lire dans les *Prolégomènes* la manière dont Kant cherche à déduire sa théorie de l'espace des mathématiques :

Kant s'interroge ici sur **la possibilité d'une mathématique pure** :

Toutes les propositions des mathématiques sont synthétiques . Il entend ici que **ces propositions ne peuvent etre prouvées au moyen d'un calcul logique** ; au **contraire, elles nécessitent certaines propositions synthétiques a-priori**, qu'on pourrait appeler des **axiomes**. Le raisonement qui découle par déduction de ces axiomes est **différent de celui de la logique pure**.

Ainsi Kant refusait d'admettre que la connaissance du monde extérieur pouvait etre obtenue autrement que par l'expérience et il en conclut que les propositions mathématiques ont toutes à voir avec quelque chose de subjectif, qu'il appelle les **formes de l'intuition : l'espace et le temps**. Le temps est le fondement de l'arithmétique et l'espace celui de la géométrie. Ce n'est que dans les formes du temps et de l'espace que les objets peuvent etre expérimentés par un sujet ; et ainsi la mathématique pure doit etre applicable à toute expérience.
L'idée selon laquelle l'espace et le temps sont subjectif est renforcées par ce que Kant nomme les **antinomies**, par lesquelles il tente de prouver que, si ils sont autre chose que des formes de l'expérience, alors ils doivent forcément se contredire eux-memes.

Ce qui est essentiel pour Russell, du point de vue logique, c'est que l'intuition a-priori fournit une méthode de raisonnement que la **logique formelle** n'admet pas. Cette méthode font de la figure géométrique, simplement imaginée, elle-meme un élément essentiel de la démonstration. Se posent alors deux questions cruciales :

1. **le raisonnement mathématique est-il différent de celui de la logique ?**
2. **y-a-t-il des contradictions dans les notions de temps et d'espace ?**

. Pour Russell, la question de la nature du raisonnement mathématique était obscurci à l'époque de Kant par plusieurs causes : c'est donc sur la nature du raisonnement et non sur celle des mathématiques elles-memes que porte l'interrogation.
Les sources d'erreur pour Kant sont au nombre de trois :

Primo, Kant n'aurait jamais mis en doute le fait que les propositions logiques soient analytiques, alors qu'il a perçu à juste titre que celles des mathématiques sont synthétiques. Depuis, il est apparu que la logique est tout aussi synthétique que toutes autres sortes de vérité.

Secondo, la **logique formelle** était dans un état bien moins avancée à l'époque de Kant qu'au début du 20ème siècle. Il était donc toujours possible de s'en tenir à la **logique aristotélicienne**, sans meme pouvoir supposer l'avènement futur d'une autre théorie. Le syllogisme restait le type de raisonnement formellent correcte ; pourtant **le syllogisme est certainement inadéquat pour les mathématiques .**

Mais au dédut du 20ème siècle, grace principalement à la **logique mathématique**, la logique formelle s'est enrichi par de nombreuses formes de raisonnement irréductibles au syllogisme, et par ce moyen les mathématiques doivent (et ont été déjà largement) etre développées strictement selon les lois de la logique.

Donc, pour Kant la logique est analytique et les mathématiques sont synthétiques, et ne se déduisent pas seulement analytiquement des axiomes (prémisses logiques) ou des concepts. Il faut **en plus** un élément essentiel, la pure intuition (ici, la construction figurative), pour établir une démonstration mathématique, qui est synthétique et apriori. Kant ne peut concevoir une démonstration mathématique qui soit purement logique.
Alors que pour Russell, la logique est synthétique et les mathématiques découlent analytiquement des concepts logiques.

Il y a une troisième raison pour laquelle Kant ne pouvait que se tromper sur la nature du raisonnement mathématique, et c'est l'état très inférieur où en étaient encore les mathématiques à la fin du 18ème siècle, par rapport à celles de l'époque moderne, c'est à dire cent ans plus tard, après les révolutions théoriques du 19ème siècle.

Par exemple, il est tout à fait impossible, sans recourir à la figuration, de déduire la septième proposition d'Euclide des axiomes euclidiens, et aucun raisonnement mathématique logiquement correcte n'éxistait au 18ème pour y parvenir. Comme la vérité des théorèmes euclidiens paraissait indubitable, il était légitime de supposer que la preuve mathématique était quelque chose de différent de la preuve logique. Mais le fait est que la plupart de ces preuves mathématiques, que Kant tenait souvent pour indubitables, étaient tout simplement fausses.

Ainsi, pour Russell, s'effondre la supposée particularité du raisonnement mathématique. Dans le développement de ses *Principes des Mathématiques*,il a démontré que tous les résultats géométriques résultent simplement des lois de la logique, à partir des définitions, qu'il a données auparavant, des trois espaces variés (various spaces) : espace projectif tridimensionnel, espace euclidien tridimensionnel et espace de Clifford . Il en va de meme pour l'arithmétique, qui ne dépend plus d'une théorie du temps, mais de la seule logique.
En conclusion, toutes les mathématiques sont déductibles des propositions fondamentales de la logique formelle, et aucune autre hypothèse n'est nécessaire.

Un kantien pourrait ici considérer que l'espace euclidien tridimensionnel a ceci de particulier par rapport aux espaces non-euclidiens, qu'il existerait comme entité ontologique, contrairement aux autres, et que c'est précisément cette existence qu'assure l'intuition a-

priori. Or Russell est catégorique, ceci est irrecevable car les mathématiques sont indifférentes à la question de l'existence de telles entités. Kant pensait que le raisonnement mathématique était différent de celui de la logique, et nécessitait l'intuition, à partir de l'idée selon laquelle l'espace euclidien est celui du monde réel.
Pour Russell, il n'en va pas aussi simplement quant à la réalité de l'espace, et aucune intuition n'est donc pertinente dans une proposition strictement mathématique.
C'est ici toute la question de la distinction cruciale, dans la théorie moderne, entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Distinction qu'on reproche à Kant de n'avoir pas faite.

. En quoi Russell pense-t-il avoir démontré que les mathématiques ne découlent que de la pure logique ? Sa critique de Kant n'arrive pratiquement qu'à la fin de son ouvrage et elle est bien sur sous-tendue par tout l'édifice de sa propre théorie de la logique et des mathématiques qu'il a dépliées auparavant. Ce qui conditionne en quelque sorte l'accès qu'on peut avoir de sa critique de Kant. Voici cependant quelques prémisses :

En géométrie, on différencie classiquement les définitions et les axiomes. Mais pour Russell, cette distinction n'a aucune validité dans les mathématiques pures, excepté en ce qui concerne les idées et les propositions de la logique :

« *En mathématiques pures, toutes les propositions énoncent des implications logiques contenant une variable. Ceci est, en fait, la définition des mathématiques pures. Les implications énoncées doivent découler (flow)* ***entièrement des propositions de la Logique****, qui prévalent sur celles des autres branches des mathématiques.* » (p. 429)

« *La logique et le reste des mathématiques pures se distinguent des mathématiques appliquées par le fait que, en elle, toutes les* ***constantes*** *sont définissables dans les termes de huit notions fondamentales, que nous appelons constantes logiques. Ce qui distingue les autres branches des mathématiques de la logique est simplement la* ***complication****, qui prend habituellement la* ***forme d'une hypothèse selon laquelle la variable fait partie d'une classe plus compliquée.*** *Une telle classe sera habituellement* ***dénotée*** *par un symbole unique ; et l'énoncé selon lequel la classe en question doit etre représentée par tel ou tel symbole est ce que les mathématiciens appellent une définition.* ***Ceci pour dire que, une définition n'est pas du tout un élément des mathématiques, mais simplement et uniquement un énoncé concernant des symboles, et ne concernant pas ce qui est symbolisé.*** »

Voici comment je comprends cette théorie :

1. Les propositions fondamentales de la logique qui régissent les mathématiques pures sont un ensemble qui ne constitue pas une classe. Cet ensemble est d'une autre nature, si on peut parler d'ensemble pour désigner la prise en compte en même temps des huit notions fondamentales. Des constantes y sont définissables au sens où elles le sont dans les termes des propositions fondamentales. C'est une première théorie de la définition, disons une théorie strictement logique de la définition.

2. Une définition mathématique, au sens classique des mathématiciens, est d'un autre ordre, et ne vaut pas pour la pure mathématique (càd la logique mathématique) mais, concerne tous les autres énoncés des mathématiques qui sont alors les mathématiques appliquées (l'algèbre, la géométrie etc...). Cette définition au sens classique est un énoncé selon lequel une classe doit etre représentée par tel symbole : par exemple le mot « symétrie ». Je pense que ces symboles, c'est toujours quelque chose qui peut s'écrire : un mot, un nombre, un dessin ou un signe quelconque. La définition ici concerne le mot « symétrie », et non ce que désigne ce mot. C'est de l'ordre du langage.

> Ce qui est de l'ordre du langage, n'est pas de l'ordre des mathématiques. Les mathématiques pures ne sont pas de l'ordre du langage. Mais alors de quel ordre sont-elles ? De l'ordre de la logique formelle. Si les définitions des mathématiques aplliquées sont de l'ordre du signe ou du langage, en tant qu'elle ne concernent que les symboles et non ce qui est symbolisé, alors le mode de définition des mathématiques pures n'est pas de l'ordre du langage ni du signe, mais peut etre de l'ordre du pur mathème.

3. La vérité en mathématiques, entendues au sens classique, est la vérité discursive, alors que la vérité des mathématiques pures de Russell est une qualité intrinsèque aux propositions fondamentales de la logique : « ***toutes les propositions fondamentales énoncent des implications logiques contenant une variable.*** » Une implication logique contenant une variable n'est pas de l'ordre du discours. Elle est peut etre de l'ordre d'une fonction.

4. Ces propositions fondamentales ne peuvent pas etre définies et c'est justement en cela qu'elles seules sont fondamentales. Et parce qu'elles ne sont pas définissables, elles sont fondatrices et suffisantes pour construire tout l'édifice des mathématiques :

« *Toutes les mathématiques sont construites par les combinaisons d'un certain nombre d'idées fondamentales (primitive ideas), et toutes leurs propositions peuvent etre explicitement énoncées dans les termes de ces idées fondamentales ; ici, toute définition est théoriquement superflue. Mais alors, lorsque la logique est étendue (extended), comme elle devrait l'etre, en tant qu'elle inclut la théorie générale des relations, il n'y a, je crois, aucune idées fondamentales en mathématiques exceptées celles qui reviennent au domaine de la Logique.* »

« *Lorsqu'il est admis que toutes les idées mathématiques, excepté celles de la logique, peuvent etre définies, il est aussi acquis qu'il n'y a pas de propositions fondamentales en mathématiques excepté celles de la logique.* »

II . La théorie kantienne des mathématiques

Le point qui fait essentiellent difficulté est la théorie de Kant selon laquelle le raisonnement géométrique ne peut procéder seulement à partir des concepts, mais qu'il nécessite une activité supplémentaire appelée construction en intuition pure.

Dans un passage de la Discipline de la Raison Pure, Kant compare ainsi le raisonnement philosophique à celui des mathématiques :

« La philosophie s'en tient à des concepts généraux, alors que les mathématiques n'arrivent à rien avec le seul concept, mais se hatent de recourir à l'intuition, où elles considèrent le concept *in concreto*, bien que ce ne soit pas de manière empirique, mais simplement dans une intuition qu'elles ont présentée a priori, c'est à dire qu'elles ont construite, et où ce qui s'ensuit des conditions universelles de la construction doit valoir aussi universellement pour l'objet du concept construit. » (B743)

L'argumentation de Friedman va s'employer à partir de là à interroger et tenter d'éclairer ce qui rend nécessaire pour Kant ce recours à l'intuition dans la géométrie.
En résumé, il en ressort deux choses :

Primo, Kant s'appuit sur la théorie euclidienne, dont l'axiomatisation est intrinsèquement incapable de produire d'elle meme les théorèmes qui en découlent.
Précisément, du point de vue mathématique, c'est la théorie moderne de la continuité qui fait défaut.

Secondo, la logique de Kant, comme pour ses contemporains, est la logique aristotellicienne. Elle ne permet pas de produire une infinité d'objets, et donc on ne peut en tirer une théorie rigoureuse de la continuité, comme l'éxige la géométrie depuis Hilbert. C'est ici la logique moderne basée sur les rapports de dépendance des quantificateurs entre eux qui fait défaut.

Dans le passage de la Critique que je viens de citer, Kant appui son raisonnement sur la démonstration euclidienne standard de la 32ème proposition du 1er livre des éléments d'Euclide, selon laquelle la somme des angles d'un triangle est égal à 180 degrés :

« *Donnons à un philosophe le concept d'un triangle, et laissons-le découvrir à sa façon quel rapport la somme de ses angles peut bien entretenir avec l'angle droit. Il n'a alors à sa disposition rien d'autre que le concept d'une figure qui est comprise entre trois lignes droites, et dans cette figure le concept du meme nombre d'angles. Dans ces conditions, il peut bien réfléchir autant qu'il* *le voudra à ce concept : il n'en dégagera rien de nouveau. Il peut analyser et expliquer le concept de le ligne droite ou celui d'un angle, ou du nombre trois, mais il ne saurait parvenir à d'autres propriétés qui ne soient pas du tout inscrites dans ces concepts.* »

« *Que dès lors le géomètre prenne en charge cette question. Il commence d'emblée par construire un triangle. Puisqu'il sait que deux angles droits ontensemble exactement la meme valeur que tous les angles adjacents susceptibles d'etre tracés à partir d'un point sur une ligne droite, il prolonge un coté de son triangle et obtient deux angles adjacents qui ensemble sont égaux à deux droits. Il divise alors l'angle externe adjacent qui est égal à un angle interne,etc....* »

« *Il parvient de cette façon,* ***en enchainant les raisonnements,*** *toujours guidé par l'intuition, à une solution de la question qui est pleinement évidente et en meme temps universelle.* »

Avant de reprendre avec Friedman l'examen des faiblesses et des conditions historiques de la théorie kantienne de la géométrie, comparée à la rigueur de la théorie moderne de la géométrie, je voudrais resituer le passage de la Critique que je viens de citer dans son contexte, c'est à dire dans le programme philosophique de la Critique de la Raison Pure comme théorie de la connaissance.

Chez Kant, la connaissance peut se rapporter de deux manières à son objet :

la **connaissance théorique** détermine cet objet et son concept (qui lui doit etre donné d'un autre coté). (On a déjà ici une théorie de la **donation)**

La **connaissance pratique** doit, en plus, rendre cet objet « effectif »

> Dans les deux cas, pratique ou théorique, il y a **une partie pure de la connaissance :** c'est le mode de connaissance ou la raison détermine entièrement apriori son objet, la **connaissance apriori**. Les mathématiques sont purement de cette sorte.
>
> La connaissance apriori est celle qui établit quelque chose sur des objets avant qu'ils nous soient donnés. Pur signifie donc avant la donation. Elle est absolument indépendante de l'expérience et de toutes les impressions des sens. Lui est opposée une connaissance empirique, qui n'est possible qu'à posteriori, c'est à dire par expérience.
>
> Je pense qu'en fait, la théorie kantienne de la connaissance est essentiellement une théorie de la donation :

« *De quelque manière et par quelque moyen qu'une connaissance puisse se rapporter à des objets, la modalité selon laquelle elle s'y rapporte (...) est en tout état de cause l'intuition. Or, cette dernière n'intervient que dans la mesure où l'objet nous est donné ; mais cela n'est à son tour possible que parce que l'objet affecte l'esprit sur un certain mode. La capacité de recevoir (réceptivité) des représentations par la manière dont nous sommes affectés par des objets s'appelle sensibilité. C'est donc par la médiation de la sensibilité que des objets nous sont donnés, et c'est elle seule qui nous fournit des intuitions ; mais c'est par l'entendement qu'ils sont pensés, et c'est de lui que procèdent des concepts. Pour autant, tout acte de penser ne peut que se rapporter (...) par la médiation de caractères, en définitive à des intuitions, par conséquent (...) à de la sensibilité, pour cette raison que d'une autre manière aucun objet ne peut nous etre donné*.» (esthétique, p.117)

Je propose ici quelques hypothèses.

Il y a une division du sujet entre sensibilité et entendement, du moins quant à l'acte de connaissance. L'intuition représente l'objet, en tant qu'il est donné par la sensibilité, dans l'entendement. Autrement dit : l'intuition est le réprésentant de la sensibilité dans l'entendement. En tant que caractère de l'objet, cette représentation peut etre pensée par l'entendement, analytiquement selon les concepts dont il est le lieu.

Il me semble qu'il y a quelque chose de moebien dans l'intuition kantienne, comme un concept limite entre le formel et le conceptuel, soit, entre la représentation et le caractère de l'objet, entendu comme sense-data. C'est à cette limite, que les mathématiques font appelle, en tant que connaissance apriori, c'est à dire hors sensibilité.
Les mathématiques sont donc d'abord un point de vue : le point de vue conceptuel de la donation.

Par ailleurs, Kant distingue deux types de jugements : les synthétiques et les analytiques. Lorsque dans un jugement, est considéré l'existence d'un rapport du sujet au prédicat, ce rapport est possible de deux manières :

- soit le prédicat est contenu par le concept et leur rapport est analytique, c'est à dire que le prédicat doit etre explicité du concept qui le contient de manière plus ou moins confuse ; et c'est un jugement analytique ou explicitatif. Le prédicat découle analytiquement du concept.

- soit, le prédicat est extrinsèque au concept, et le rapport établit entre eux par le jugement est synthétique, ou extensif. C'est à dire que le jugement ajoute quelque chose au concept.

Si je dis qu'un corps est étendu, le concept de corps suffit pour en tirer l'étendue qui lui appartient. C'est un jugement analytique.

Mais si je dis qu'un corps est pesant, je ne peux adjoindre la pesanteur au corps à partir du concept de corps car le prédicat de pesanteur ne lui appartient absolument pas. C'est un jugement synthétique. Les jugements d'expérience, sont tous synthétiques.

« *Ainsi est-ce sur l'expérience que se fonde la possibilité de la synthèse du prédicat de la pesanteur avec le concept du corps, parce que les deux concepts, bien que l'un ne soit pas contenu dans l'autre, appartiennent pourtant l'un à l'autre, quoique de façon contingente, comme parties d'un tout, à savoir l'expérience, qui elle -meme est une liaison synthétique des intuitions.* » (intro, p.102)

Qu'en est-il alors des mathématiques ?

« *Les propositions mathématiques sont toujours des jugements apriori et ne sont pas empiriques, parce qu'elles apportent une nécessité qui ne peut etre tirée de l'expérience.* »

Cependant, pour Kant les jugements mathématiques sont tous synthétiques.
Par exemple pour un axiome quelconque de la géométrie, comme « *la ligne droite est la plus courte entre deux points* », « *le concept de ce qui est droit ne contient aucune détermination de grandeur, mais seulement une qualité. Le concept de ce qui est le plus court est donc entièrement surajouté et ne peut etre par aucune analyse tiré du concept de la ligne droite* »

De meme, en arithmétique, le concept du nombre 12, n'est en aucune manière déjà contenu dans la somme de 5 et 7. Ce concept de la somme ne contient que le concept de la réunion des deux nombres en un seul. Dans les deux exemples, aucune analyse des concepts ne permet d'obtenir le prédicat. Ce sont des jugements purement synthétiques.

Pour autant, ce n'est pas de l'expérience que se fonde la synthèse, puisque les mathématiques sont purement apriori. La ressource de l'expérience fait défaut pour fonder les jugements synthétiques apriori que sont les propositions des mathématiques.
C'est par l'intermédiaire de l'intuition que la synthèse est possible : pour la somme, on compte sur ses doigts, et pour la géométrie on dessine la figure.

Pour reprendre ici le fil de mes hypothèses, je dirais que l'intuition donne la construction sensible de la figure, comme représentant de l'objet géométrique, pour le point de vue purement conceptuel de la donation de cet objet qu'est la proposition mathématique.

Pour rappel : « *l'intuition, où elles considèrent le concept in concreto, bien que ce ne soit pas de manière empirique* ».

L’intuition c’est donc du concret, **avant** toute expérience.
Kant distingue, deux modes de l’objet : le phénomène et la chose-en-soi. Le phénomène est l’objet sensible, celui qui peut etre objet d’expérience, donc de connaissance. Et la chose-en-soi demeure au-delà de toute expérience possible, non donné, et donc inconnaissable.

Kant ne dit pas que l’intuition est un mode de l’objet, mais il me semble qu’il y a quelque chose de cet ordre dans ce *in concreto* qui n’est pas de l’ordre de l’expérience, donc du phénomène.
L’apriori n’est pas hors expérience, mais **avant** l’expérience.
Je pense que kant ne parle pas simplement d’expérience au sens expérimental commun, de j’ai fais telle ou telle expérience, scientifique, sexuelle ou autre. Je pense qu’il parle de la donation ; la seule expérience dont il s’agisse c’est la donation.
Et ce n’est pas simplement un acte de jugement d’éxistence ou d’attribution du donné ; c’est d’abord une logique temporelle : « avant » l’expérience. C’est du temps dont il s’agit.
L’intuition en géométrie ce serait ainsi l’introduction du temps dans la science de l’espace, par cette structure temporelle qu’est la donation.

III . Retour à l’examen critique de la théorie kantienne

Kant s’appui sur la méthode et sur les axiomes d’Euclide, qui nécessitent l’intuition en plus du concept pour leur démonstration. Car on ne peut déduire logiquement des axiomes euclidiens les théorèmes de la géométrie. Il faut recourir à la méthode de construction euclidienne avec règle et compas, qu’on trouve exposée dans les trois premières propositions des *Eléments* d’Euclide.

Or la théorie moderne se passe de toute construction pour pouvoir démontrer quoi que ce soit en géométrie. Et Russell veut que les mathématiques soient purement analytiques, qu’elles découlent entièrement des prémisses (primitive propositions) de la logique.
Et ce n’est pas la logique classique qui peut permettre la logicisation des mathématiques.

La diffculté repose sur la possibilité de démontrer l’existence d’une infinité d’objets, et en particulier de démontrer l’existence des points requis pour la géométrie euclidienne.
C’est un problème de logique avant tout, et il va falloir revenir sur la différence entre la syllogistique de Kant et les logiques modernes de Frege et Russell.
Mais c’est par un problème mathématique, qui bien qu’étroitement lié à la question logique, que je propose de commencer : **la question de la continuité**.

Illustration : la démonstration que fait Euclide de la 1ère proposition des *Eléments* qui dit qu’un triangle équilatéral peut etre construit avec n’importe quel segment de ligne donné.
La démonstration se développe ainsi : soit donné un segment de ligne AB, construisons, par le 3ème postulat, les cercles C1 et C2 avec AB pour rayon.

Prenons C comme point d'intersection de C1 et C2 et traçons les lignes AB et BC. Ainsi, alors, par la définition d'un cercle (définition 15) : AC = AB = BC , ABC est équilatéral.

Or, il y a une objection moderne standard à cette démonstration : Euclide n'a pas prouvé l'existence du point C. Il n'a pas montré que les cercles C1 et C2 s'entrecroisaient réellement, et peut-etre que C1 et C2 ne font en quelque sorte **que glisser l'un sur l'autre** et qu'il n'y a donc pas de point C d'ntersection.

Dans les formulations modernes de la géométrie euclidienne, cette possibilité de non-intersection est explicitement exclue par un axiome de continuité .
De ce point de vue alors, non seulement la démonstration d'euclide est imparfaite, mais aussi toute son axiomatique, car l'existence du point C ne découle tout simplement pas des axiomes euclidiens.

Hilbert a donné à la géométrie euclidienne sa formalisation plus ou moins définitive, en 1899. Son axiomatisation, ne reprends pas les énoncés d'Euclide tels quels. Ils sont reformulés dans un langage formel et conceptuel rigoureux, dans lequel la démonstration géométrique elle-meme est un défilé d'expressions dans un langage formel donné.
Dans cette géométrie, la conjonction de la proposition « x est un triangle » avec les autres axiomes implique la proposition « la somme des angles de x est égale à 180° » par la logique seule. Toute la géométrie découle logiquement, par l'analyse des concepts de base que sont les axiomes hilbertiens.

Ceci est rendu possible par l'inclusion dans cette axiomatique, d'un **axiome de continuité** et d'une **théorie de l'ordre** explicite, c'est à dire une théorie de la structure et de la cardinalité des points sur une droite. C'est la seule façon de démontrer rigoureusement du point de vue logico-mathématique, l'existence de tous les points requis par la géométrie, c'est à dire : l'existence d'une infinité de points.

Nous avons là trois notions des mathématiques modernes qui sont étroitement liées à l'invention au cours du 19$^{\text{ème}}$ siècle de la logique mathématique, et qui bien sur étaient insoupçonnées à l'époque de Kant.

Ces trois notions sont, la continuité, la cardinalité et l'existence, qui peuvent en fait etre ramenées à la seule théorie de la continuité.
En particulier, la constitution en arithmétique de l'ensemble des nombres réels permet de passer de la notion plus ou moins intuitive de continuité dans l'ensemble des nombres entiers naturels, à la pleine continuité.
Ce que les mathématiciens appelaient auparavant continuité pour constituer l'infinité d'un ensemble comme les entiers naturels, n'est plus considéré que comme une notion de densité, qui n'est pas la pleine continuité.

La continuité, surtout par les principes logiques sur lesquels elle repose, permet d'inférer toutes les mathématiques analytiquement depuis les concepts, et d'exclure tout recours, devenu inutile, à la construction ou à quelque sorte d'intuition que ce soit.

Il y a bien dans le second postulat d'Euclide la notion selon laquelle les segments de droite peuvent etre produits continuement. Mais la notion intuitive de continuité figurant dans ce

postulat n’est pas la notion moderne de la continuité : en particulier, elle n’est pas distinguée de la simple densité.
Cette distinction n’a été véritablement articulée qu’à la fin du 19ème siècle par Dedekind. Avant cela, ce que les mathématiciens appelaient continuité, c’est que « pour chaque élément il y en a un plus petit » ou « entre chaque pair d’éléments il y en a un troisième ». c’est ce qu’on peut faire avec un ensemble de points infini mais discret comme celui des nombres entiers dont disposait Euclide. Et c’est ce que la théorie moderne appelle la densité de l’ensemble, à distinguer de la véritable continuité.

La théorie d’ordre d’Hilbert se développe de la manière suivante :

On pose pour commencer que les points sur une droite quelconque soient ordonnés par une relation à deux places : « etre à la gauche de », notée $<$.
Cette formule est l’idée maitresse qui régit la structure. C’est la théorie logique de premier ordre (qui n’utilise que des variables discrètes) d’ordre linéaire dense sans points finaux.
On part donc d’une théorie discrète, et de logique d’ordre 1.

La présence de tels axiomes est la différence majeure entre l’axiomatisation d’Hilbert et celle d’Euclide. Car ils font usage de ce que Friedman appelle la logique polyadique moderne, c’est à dire à plusieurs sortes de variables. C’est aussi d’une logique de second-ordre dont il s’agit, c’est à dire d’une extension moderne de la logique classique de premier ordre.

Les logiques d’ordres supérieurs, sont des extensions toujours plus complexes de la logique propositionnelle. La logique de premier ordre, que Friedman identifie à la syllogistique dont disposait Kant, considère une variable qui, selon le contexte, soit fonctionne en marque-place pour une valeur d’argument, soit désigne un individu quelconque d’un domaine ou bien joue le role de constante d’individu, soit, en tant que variable liée ou associée à un quantificateur, indique sur quoi porte une quantification. Les quantificateurs existentiels et universels sont des opérateurs qui transforment les prédicats (n + 1)-aires en prédicats n-aires.

Quel est l’avantage des logiques étendues sur la logique classique ?
Les logiques d’ordre supérieur sont des logiques formelles qui étendent le calcul des prédicats du premier ordre en permettant d’utiliser les variables dans les termes en tant que `fonctions`, et dans les expressions en tant que `prédicats`.

On considère les fonctions et prédicats comme des objets à part entière, au meme titre, par exemple, qu’un nombre entier. On s’autorisera ainsi, d’une part, à quantifier les prédicats et fonctions et, d’autre part, à donner des fonctions ou des prédicats en arguments d’autres fonctions et prédicats. La logique du second ordre étend celle du premier ordre par l’ajout de variables relationnelles, qui peuvent doc etre quantifiées.

En particulier la logique du second ordre permet de quantifier sur des fonctions, vues comme des cas particuliers de relations. En comparaison à la logique classique, la logique de second ordre à un très grand pouvoir d’expression.

En premier ordre, la compacité empeche certaines propriétés d’etre exprimables, parce qu’elles perdent leur sens pour des ensembles infinis. Elles deviennent exprimables en second-ordre.

En particulier, c'est la possibilité en second-ordre de la théorie des relations, c'est à dire la relation d'interdépendance d'un quantificateur sur l'autre, en particulier la relation de dépendance des quantificateurs universels sur les quantificateues existentiels l'un vis à vis de l'autre, soit la forme logique :

Ce qui importe pour Friedman, c'est la présence dans l'axiomatisation d'Hilbert de cette forme logique, dans les axiomes 4 à 6 de la théorie de l'ordre, surtout le 6$^{\text{ème}}$ qui est l'axiolme de densité.

Avec de tels opérateurs, ont peut produire et démontrer l'existence d'une infinité d'objets infinis, par exemple l'ensemble des nombres réels. Alors qu'avec la logique syllogistique, pour un nombre de prédicats n, on ne peut produire et démontrer l'existence que de 2 puissance n objets.

Seule la logique moderne, depuis Frege, permet de constituer la continuité comme telle, c'est à dire de produire et démontrer logiquement l'existence d'une infinité de points, pour établir en logique la géométrie.
Par un raisonnement logico-mathématique difficile à rapporter, Friedman démontre que la syllogistique ne permet de démontrer, dans le théorème euclidien de l'intersection des cercles, que l'existence de deux points : A et B.

Ainsi, selon Friedman, ni Kant, ni les mathématiciens et logiciens de son époque, n'avaient à disposition les théories nécessaires pour fonder les mathématiques en pure logique.
Il avait deux moyens à sa disposition, tous deux faisant appel à l'expérience : la méthode de construction euclidienne d'une part, et la notion spatio-temporelle de mouvement à la base du calcul des flux de Newton d'autre part.

Si on reprend l'exemple de la première proposition des *Eléments*, la méthode de démonstration euclidienne, reprise par Kant, est la suivante :

Nous commençons avec trois opérations de base :

1. en traçant un segment de ligne connectant chacun des points donnés.
2. en étirant un segment de ligne à le partir de chaque segment de ligne donné
3. en traçant un cercle avec chacun des points donnés pour centre et chacun des segments de ligne donné comme rayon.

Nous sommes alors autorisés à répéter les trois opérations n'importe quel nombre fini de fois. Les postulats 1 à 3 d'Euclide donnent les règles pour cette construction itérative, et les points de notre modèle ne sont que les points qui peuvent etre ainsi construits. En particulier, l'infinité de cet ensemble de points est garantie par la répétition infinie de notre méthode de construction.

A contrario, l'interdépendance des quantificateurs existentiels et universels présente dans le 6$^{\text{ème}}$ axiome d'Hilbert, nous permet de saisir **formellement,** l'idée intuitive d'une méthode itérative de construction : chaque valeur x du quantificateur universel produit une valeur y du quantificateur existentiel, y pouvant alors etre remplacé par x en produisant une nouvelle valeur y', et ainsi de suite. L'existence d'une infinité d'objets peut etre déduite explicitement par la seule logique.

Pierre Pitigliano
Les Presses Ouvrières de France 2014